פונקציונלים

# הגדרה

יהי V מ"ו מעל . העתקה לינארית נקראת פונקציונל.

# דוגמאות

1. . לכל העתקה לינארית מוגדרת ע"י קוארדינטה הi היא פונקציונל.
2. מרחב שורות. לכל ווקטור נגדיר פונקציונל:  
   הערה: גם ההפך: לכל שורה נגדיר פונקציונל
3. נגדיר פונקציונל
4. , ,

# הגדרה

יהי V מ"ו מעל . המרחב נקרא מרחב הדואלי(לV)

## הערה

אם אזי או (כלומר ) או אם אז .

אם אזי . אם ו אזי

# בסיס הדואלי

יהי V מ"ו מעל עם ו, בסיס. בסיס נקרא בסיס הדואלי (לS) אם:

דלטה של Kronker = ,

## דוגמה:

מרחב השורות   
 מרחב העמודות

# משפט

יהי V עם ו בסיס. אזי קיים בסיס דואלי יחיד *ב.*

## הוכחה

יהי בסיס.  
לכל נגדיר העתקה לינאריות ע"*י . זה מגדיר n פונקציונלים. נוכיח ש בסיס מתקיים . נוכיח ש כלומר כל פונקציונל אפשר להציג: .*

*יהיו . מתקיים:  
⇦ ו מקבלים אותם ערכים על כל ווקטורים מהבסיס! ⇦ הם שווים*

## תוצאה

אם אזי

# משפט

יהיו V מ"ו, בסיס ו בסיס הדואלי. מתקיים:  
לכל :   
לכל :

## דוגמה

## תרגיל

*– באיזה מובן זה סימטרי?*

## הוכחה למשפט

טענה: לכל v.

קיימים כך ש. מתקיים:

⇦ לכל בגלל ש בת"ל.

## תרגיל

להוכיח ב

# משפט

יהיו V מ"ו, בסיסים עם מטריצת מעבר P מS ל. אזי מטריצת מעבר מ ל  
(ו *היא מטריצת מעבר מ ל)*

## הוכחה

לכל מתקיים .  
. לכל מתקיים ,  
אבל , לכן:

העתקה דואלית ומטריצה משוחלפת

# הגדרה

יהיו V,U מ"ו ו העתקה לינארית. נגדיר העתקה דואלית(ל-T) ע"י

# משפט

לינארית

## הוכחה

צ"ל :

# משפט

יהיו , בסיסים ובסיסים הדואליים.  
אזי מתקיים

## הוכחה

יהיו

אם אז ⇦  
כלומר  
 ⇦